Exercice 1 : .... 5 points

1. a. Montrons que $(\sin 2x)^4 = 16\cos^4 x.\sin^4 x.$

Méthode 1

D'après la formule de duplication (ou multiplication par 2) on a : $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$

$(\sin 2x)^4 = (2\sin x.\cos x)^4 = 2^4(\sin x)^4.(\cos x)^4 = 16\cos^4 x.\sin^4 x$ ***(1pt)***

Méthode 2

$$\begin{aligned}16\cos^4 x\cdot\sin^4 x &= 16\left[\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\times\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right]^4\\ &= 16\left[\frac{1}{4i}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right]^4\\ &= 16\left[\frac{1}{4i}\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)\right]^4\\ &= 16\left[\frac{1}{4i}\times 2i\sin(2x)\right]^4\\ &= 16\left[\frac{1}{2}\times\sin(2x)\right]^4\\ &= 16\times\frac{1}{16}\times(\sin 2x)^4\\ &= (\sin 2x)^4\end{aligned}$$

b. Linéarisons $E = 16\cos^4 x.\sin^4 x.$

D'après la question a°) on a: $E = 16\cos^4 x.\sin^4 x = (\sin 2x)^4$

D'après la formule d'Euler : $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$

En posant $\theta = 2x$, On a donc $\sin 2x = \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$

$$\begin{aligned}E &= \left[\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right]^4 = \frac{1}{16}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^4\\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}-4e^{3i\theta}e^{-i\theta}+6e^{2i\theta}e^{-2i\theta}-4e^{i\theta}e^{-3i\theta}+e^{-4i\theta}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}-4\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)+6\right) = \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}-4\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)+6\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(2\cos 4\theta - 4\times 2\cos 2\theta + 6\right) = \frac{1}{16}\left(2\cos 8x - 8\cos 4x + 6\right)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{E = \frac{1}{8}\left(\cos 8x - 4\cos 4x + 3\right)}$ ***(2pts)***

Sans faire de changement de variable

$$\begin{aligned}E &= 16\cos^4 x\sin^4 x\\ &= (\sin 2x)^4\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)\right)^4$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(e^{2ix}\right)^4 - 4\left(e^{2ix}\right)^3\left(e^{-2ix}\right) + 6\left(e^{2ix}\right)^2\left(e^{-2ix}\right)^2 - 4\left(e^{2ix}\right)\left(e^{-2ix}\right)^3 + \left(e^{-2ix}\right)^4\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{8ix} - 4e^{6ix}e^{-2ix} + 6e^{4ix}e^{-4ix} - 4e^{2ix}e^{-6ix} + e^{-8ix}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(e^{8ix} + e^{-8ix}\right) - 4\left(e^{4ix} + e^{-4ix}\right) + 6\right]$$

$$= \frac{1}{16}(2\cos 8x - 8\cos 4x + 6)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{8}(\cos 8x - 4\cos 4x + 3)}.$$

Autre méthode

$$E = (\sin\theta)^4 = \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(z - \bar{z}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(z^4 - 4z^3\bar{z} + 6z^2\bar{z}^2 - 4z\bar{z}^3 + \bar{z}^4\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(z^4 + \bar{z}^4 - 4z^2 - 4\bar{z}^2 + 6\right) = \frac{1}{16}\left[\left(z^4 + \bar{z}^4\right) - 4\left(z^2 + \bar{z}^2\right) + 6\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(\frac{z^4 + \bar{z}^4}{2}\right) - 4\left(\frac{z^2 + \bar{z}^2}{2}\right) + 3\right] = \frac{1}{8}(\cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 3)$$

$$= \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

Comme $\theta = 2x$, on a : $E = \frac{1}{8}\cos 8x - \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{3}{8}$

2. a. Calculons $(2-i)^3$.

$(2-i)^3 = (2)^3 - 3(2)^2(i) + 3(2)(i)^2 - (i)^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$

$\boldsymbol{(2-i)^3 = 2 - 11i}$ ***(1pt)***

b. Déduisons les racines cubiques de $2 - 11i$.

$(2-i)^3 = 2 - 11i \Longrightarrow 2 - i$ est une racine cubique de $2 - 11i$.

Pour trouver toutes les racines cubiques de $2 - 11i$, il suffit de multiplier $2 - i$ par les les ra cines cubiques de l'unité qui sont : 1 ; $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Notons z_1, z_2 et z_3 les racines cubiques de $2 - 11i$, on a donc :

$z_1 = (2-i) \times 1 = 2 - i.$

$$z_2 = (2-i) \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = (2-i) \times \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3} - 2}{2} + i\frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3=(2-i)\times e^{i\frac{4\pi}{3}}=(2-i)\times\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1-i\sqrt{3}+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3=-\frac{\sqrt{3}+2}{2}+i\frac{1-2\sqrt{3}}{2}.$$

Les racines cubiques de $2-11i$ sont :

$2-i$; $\frac{\sqrt{3}-2}{2}+i\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}+2}{2}+i\frac{1-2\sqrt{3}}{2}$. ***(1pt)***

Exercice 2 : .... 5 points✍

Afin d'apporter une solution aux problèmes d'émission de dioxyde de carbone (CO_2), un constructeur japonais s'est orienté vers les véhicules électriques.

Au cours de l'année 2014, sa production a été de 25000 véhicules électriques.

Le constructeur a vu sa production augmentée de 12% par an.

On note u_1 le nombre de véhicules électriques produits en 2014 ; $u_1=$ 25000 véhicules.

On nomme u_2 le nombre véhicules électriques produits en 2015, u_3 celui de 2016.

1. Calculons u_2 et u_3.

   $u_1=25000$

   $u_2=u_1+12\%u_1=1{,}12u_1=25000+12\%(25000)=28000$

   $u_3=u_2+12\%u_2=1{,}12u_2=28000+12\%(28000)=31360$

   $\boldsymbol{u_2=28\,000\ ;\quad u_3=31\,360}$ ***(1pt)***

2. a. Détermine la nature de la suite (u_n).

   $u_2=1{,}12u_1$; $u_3=1{,}12u_2$; $u_{n+1}=1{,}12u_n$ alors $\frac{u_2}{u_1}=\frac{u_3}{u_2}=\frac{u_{n+1}}{u_n}=1{,}12$

   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q=1,12$ et de premier terme $u_1=25000$. ***(0,5pt)***

   b. Précisons la raison de la suite (u_n).

   La raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $q=1{,}12$; d'après a°). ***(0,5pt)***

3. Exprimons u_n en fonction de n.

   Etant donné que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q=1,12$ et de premier terme $u_1=25000$, son terme général est $u_n=u_1\times q^{n-1}$.

   $\boldsymbol{u_n=25\,000\times 1{,}12^{n-1}}$ ***(1pt)***

4. a. Déterminons la valeur de n correspondant à l'année 2020.

   Méthode 1 : comptage

2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
1	2	3	4	5	6	7

   donc $n=7$ ***(1pt)***

   Méthode 2 : Calcul du nombre de termes

Le nombre de terme n, entre le nombre p et nombre m $(p \leq m)$ se calcule à l'aide de la formule $n = m - p + 1$.

$m = 2020$, $p = 2014$, $n = m - p + 1 = 2020 - 2014 + 1 = 7$; $\boldsymbol{n = 7.}$

b. Déduisons le nombre de véhicules électriques produits en 2020.

$\boldsymbol{u_7 = 25000 \times 1{,}12^6 \approx 49\ 345}$ ***(1pt)***

Problème : .... 10 *points*

1. On considère le polynôme $h(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

a. Calculons $h(1)$ puis factorisons $h(x)$.

$h(1) = 1 - 3 + 2 = 0$

$\boldsymbol{h(1) = 0.}$ ***(0,5pt)***

1 étant une racine de $h(x)$, alors h est factorisable par $(x - 1)$.

Méthode 1 : Tableau d'Hörner

	1	-3	0	2
1	$\downarrow$	1	-2	2
	1	-2	-2	0

$h(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 2)$ ***(1pt)***

Méthode 2 : Division euclidienne

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 \quad + \quad 2 & x - 1 \\
\cline{2-2}
\underline{-x^3} \ \underline{+x^2} \qquad\qquad & x^2 - 2x - 2 \\
-2x^2 \qquad\quad & \\
\underline{2x^2} \ \underline{-2x} \qquad & \\
-2x + 2 & \\
\underline{2x - 2} & \\
0 + 0 &
\end{array}
$$

$h(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 2)$

Méthode 3 : Les coefficients indéterminés

1 étant une racine de $h(x)$, alors h est factorisable par $x - 1$.

Alors, il existe $a, b \in \mathbb{R}$, tel que $h(x) = (x - 1)(x^2 + ax + b)$

$h(x) = (x - 1)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a - 1)x^2 + (b - a)x - b$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a - 1 = -3 \\ b - a = 0 \\ -b = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases}$$

$\boldsymbol{h(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 2)}$

b. Étudions le signe de $h(x)$.

$h(x) = 0 \Longrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Longrightarrow x = 1$ ou $x^2 - 2x - 2 = 0$

$x^2 - 2x - 2 = 0$;

$\Delta = (-2)^2 - 4(-2) = 4 + 8 = 12$

$x_1 = \dfrac{2-\sqrt{12}}{2} = 1-\sqrt{3}$ et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{12}}{2} = 1+\sqrt{3}$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-2x-2	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\forall x \in]-\infty, 1-\sqrt{3}[\cup]1, 1+\sqrt{3}[, h(x) < 0$

$\forall x \in]1-\sqrt{3}, 1[\cup]1+\sqrt{3}, +\infty[, h(x) > 0$

$\forall x \in \{1-\sqrt{3}\ ; 1\ ; 1+\sqrt{3}\}, h(x) = 0$ ***(1pt)***

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $x \longmapsto f(x) = \dfrac{x^3-3x+2}{x-2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (en abscisse 1cm pour 1unité, en ordonnée 1cm pour 2 unités).

a. Déterminons les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 2.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-3x+2}{x-2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}(x^2) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-3x+2}{x-2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}(x^2) = +\infty$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2}\left(\frac{x^3-3x+2}{x-2}\right) = \frac{8-6+2}{2-2} = \frac{4}{0}\ ?$$

Signe de $x-2$:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \dfrac{4}{0^-} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$; $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$; $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty}$; $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty}$

(1pt)

Précise les asymptotes verticales et horizontales éventuelles.

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$; alors la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe C. ***(0,5pt)***

b. Montrons que $f'(x) = \dfrac{2h(x)}{(x-2)^2}$

$f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x - 2}$

$f'(x) = \dfrac{(3x^2-3)(x-2)-(x^3-3x+2)}{(x-2)^2} = \dfrac{3x^3-6x^2-3x+6-x^3+3x-2}{(x-2)^2}$

$= \dfrac{2x^3-6x^2+4}{(x-2)^2} = \dfrac{2(x^3-3x^2+2)}{(x-2)^2} = \dfrac{2h(x)}{(x-2)^2}$; $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{2h(x)}{(x-2)^2}}$ ***(1pt)***

c. Étudions les variations de f et dressons son tableau de variation.

Signe de $f'(x)$

$f'(x) = \dfrac{2h(x)}{(x-2)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$, $(x-2)^2 > 0$; le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $h(x)$.

$\forall x \in]-\infty, 1-\sqrt{3}[\cup]1, 1+\sqrt{3}[$, $h(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est décroissante.

$\forall x \in]1-\sqrt{3}, 1[\cup]1+\sqrt{3}, +\infty[$, $h(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est croissante.

$\forall x \in \{1-\sqrt{3}\ ; 1\ ; 1+\sqrt{3}\}$, $h(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f$ est constante. ***(0,5pt)***

Tableau de variation :

Les extrémums

$f(1-\sqrt{3}) = \dfrac{(1-\sqrt{3})^3 - 3(1-\sqrt{3}) + 2}{1-\sqrt{3}-2} = \dfrac{1-3\sqrt{3}+9-3\sqrt{3}-3+3\sqrt{3}+2}{-1-\sqrt{3}}$

$= \dfrac{9-3\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}} = \dfrac{(9-3\sqrt{3})(-1+\sqrt{3})}{-2} = \dfrac{-9+9\sqrt{3}+3\sqrt{3}-9}{-2}$

$= -9+6\sqrt{3} = 1{,}3923$

$f(1+\sqrt{3}) = \dfrac{(1+\sqrt{3})^3 - 3(1+\sqrt{3}) + 2}{1+\sqrt{3}-2} = \dfrac{1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}-3-3\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-1}$

$= \dfrac{9+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{(9+3\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}+9+9+3\sqrt{3}}{2}$

$= 9+6\sqrt{3} = 19{,}3923$

$f(1) = \dfrac{1-3+2}{1-2} = 0$

Tableau.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		2		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-9+6\sqrt{3}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$9+6\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

(1,5pt)

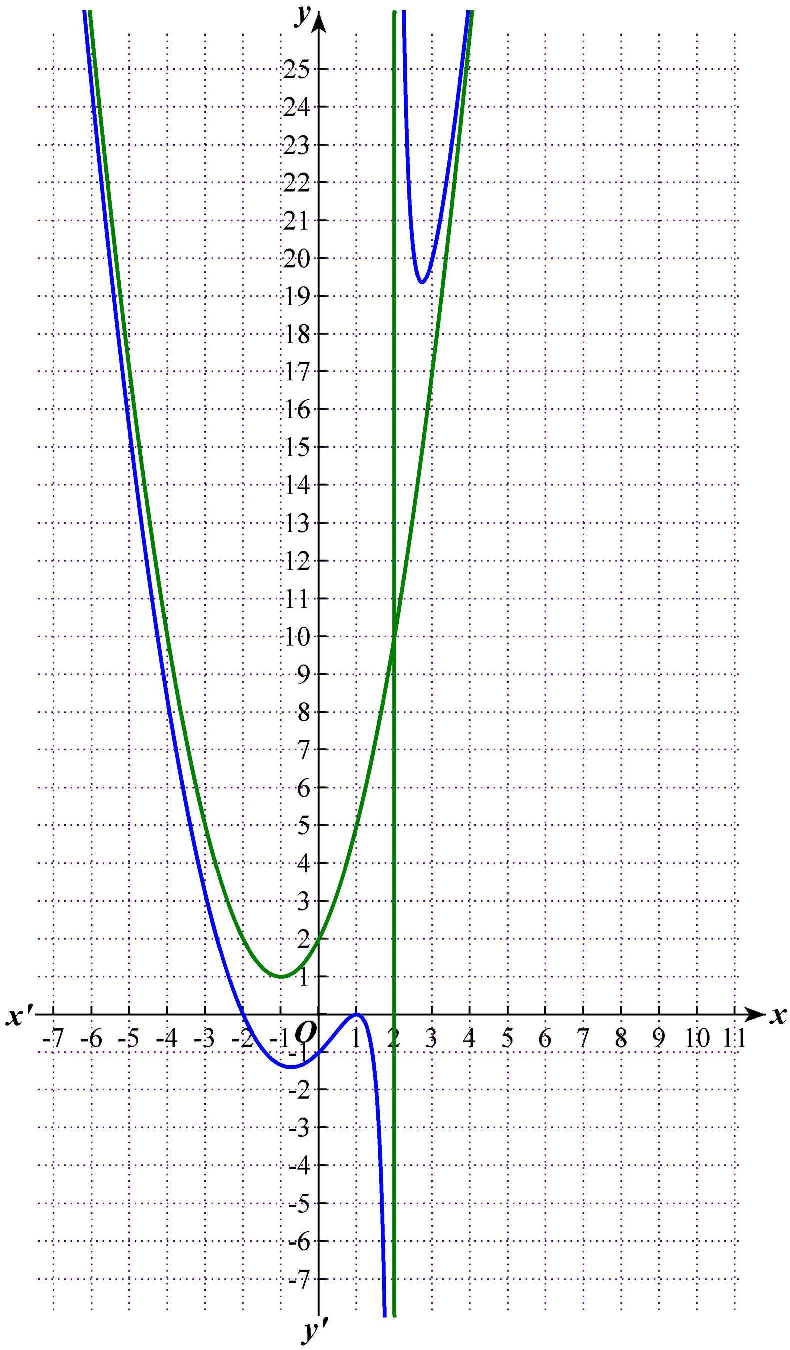
3. Trouve les nombres réels a, b, c et d tels que pour tout x élément de son domaine de définition : $f(x) = ax^2 + bx + c + \dfrac{d}{x-2}$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x \quad + \quad 2 & x-2 \\
\cline{2-2}
\underline{-x^3 + 2x^2} \qquad\qquad & x^2 + 2x + 1 \\
2x^2 - 3x + 2 & \\
\underline{-2x^2 + 4x} \qquad & \\
x + 2 & \\
\underline{-x + 2} & \\
4 &
\end{array}
$$

$a = 1$; $b = 2$; $c = 1$; $d = 4$ et $f(x) = x^2 + 2x + 1 + \dfrac{4}{x-2}$ ***(1pt)***

4. On appelle g la fonction définie par $x \longmapsto g(x) = x^2 + 2x + 1$ et P sa courbe représentative.
Étudions le signe de $f(x) - g(x)$.
$f(x) - g(x) = x^2 + 2x + 1 + \dfrac{4}{x-2} - (x^2 + 2x + 1) = \dfrac{4}{x-2}$
$\forall x \in]-\infty, 2[, \ f(x) - g(x) < 0;$
$\forall x \in,]2, +\infty[, \ f(x) - g(x) > 0.$ ***(0,5pt)***
Déduction des positions relatives des courbes C et P
$\forall x \in]-\infty, 2[, \ f(x) - g(x) < 0,$ C est en dessous de P
$\forall x \in,]2, +\infty[, \ f(x) - g(x) > 0,$ C est au dessus de P. ***(0,5pt)***

5. Traçons C et P dans le même repère.



(1pt)